Principe d'extension faible

Le mémoire (et son éventuelle poursuite en thèse prévue) s'inscrit à l'intersection de la théorie des ensembles et de l'analyse fonctionnelle. Les rapports entre la théorie des ensembles et l'analyse fonctionnelle ont été exploités au siècle dernier sous l'angle des algèbres d'opérateurs. Ces connexions ont été davantage exploitées au cours des vingt dernières années grâce aux travaux pionniers d'Ilijas Farah et ses collègues. Ils ont montré que certains phénomènes importants dépendent du modèle ensembliste, et sont indépendants des axiomes habituels (l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix, ZFC).

Un objet au cœur de l'étude est la *compactification de Stone-Čech*. Cette compactification associe à un espace raisonnable X (disons, localement compact et polonais) un espace compact βX, de manière fonctorielle. Le reste du plongement naturel $X \hookrightarrow \beta X$ est appelé *espace de couronne* de X, noté X^*. Les espaces βX et X^* codent le comportement de X à l'infini et restent en général assez mystérieux.

On souligne immédiatement l'importance de cette étude pour ses liens avec la théorie des algèbres d'opérateurs. En effet la dualité de Gelfand fait correspondre la compactification de Stone-Čech βX à l'espace des idéaux maximaux de l'algèbre des fonctions continues bornées sur X, notée $C_b(X)$ et fait correspondre X^* à $C_b(X)/C_0(X)$ où $C_0(X)$ est l'espace des fonctions continues bornées sur X qui s'annulent à l'infini.

On cherche à comprendre comment les fonctions continues entre X^* et Y^* peuvent être pensées en termes des fonctions entre les espaces sous-jacents X et Y, et donc à comprendre quelle information sur X^* est codée par X lui-même.

Le *principe d'extension faible* (weak extension principle) $wEP(X, Y)$ est l'énoncé suivant :

> pour toute fonction continue $F : X^* \to Y^*$, il existe une partition $X^* = U_0 \cup U_1$ ouvert-fermé telle que $F[U_0]$ est dense nulle part dans Y^* et $F \restriction U_1$ se relève en une $F_1 : \beta X \to \beta Y$ continue où $F_1[X] \subseteq Y$.

Ce genre de fonctions (celles qui se divisent comme dans le wEP mentionné ci-dessus) sont absolues entre les modèles de ZFC, et leur existence ne peut être changée par des resultats d'independence. Demander donc que toutes les fonctions entre les restes Stone-Čech soient de ce type est donc une demande très forte (en fait la plus forte possible en ZFC).

Le principe a ses origines dans l'étude des automorphismes de l'espace $\mathbb{N}^*$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Dans le cas où X et Y sont ordinaux, $wEP(X, Y)$ est conséquence de l'axiome de Martin (MA) et de l'« Open Coloring Axiom » (OCA, formulé par Stevo Todorčević) qui sont des généralisations indénombrables du théorème de Baire, dont on sait qu'elles contredisent l'hypothèse du continu. Par la suite le $wEP(X, Y)$ a été étudié pour des espaces plus compliqués (mais toujours de *dimension zéro*) dans la monographie « Analytic Quotients » de Farah et puis dans l'article « Rigidity Conjectures for Continuous Quotients » de Vignati. Le mémoire aura pour but de déterminer si les deux problèmes suivants découlent du principe d'extension faible.

Problème 1. *Soit $F : X^* \twoheadrightarrow Y^*$ une surjection continue. Alors il existe une $g : Y \hookrightarrow X$ continue telle que F se* relève *en g_*.*

Problème 2. *Soit $F : X^* \hookrightarrow Y^*$ une injection continue. Alors il existe une $g : Y \twoheadrightarrow X$ continue telle que F se* relève *en g_*.*

Ces deux problèmes représentent les étapes intermédiaires pour montrer que pour tous espaces X, Y localement compacts et polonais, on a le $wEP(X, Y)$ sous l'hypothèse de MA et OCA. Pour attaquer ces problèmes, la stratégie sera de suivre une approche combinatoire (en l'occurrence de la combinatoire des ultrafiltres). Le projet a un prolongement naturel dans le cadre d'une thèse : la démonstration du $wEP(X, Y)$ en tout généralité et l'étude des problèmes liés pour des espaces de plus grand caractère de densité.