Sur les extensions de modèles de l'arithmétique de Peano

Deniz YILMAZ

11 juin 2021

Table des matières

Introduction

L'axiomatisation de l'arithmétique est proposée par Giuseppe Peano dans son *Arithmetices principia nova methodo exposita* [Pea89] publié en 1889 et indépendamment par Richard Dedekind dans son *Was ist und was sollen die zahlen ?* [Ded93] publié en 1888. Ce système d'axiomes (l'axiomatique de l'arithmétique dans la logique du deuxième ordre : PA_2) contient la formalisation de la récurrence dans la logique du deuxième ordre. Grâce à la grande puissance expressive de la logique du deuxième ordre, cette axiomatisation ne décrit qu'un seul objet : $\mathbb{N}$.

La logique du premier ordre est moins expressive que la logique du deuxième ordre. L'axiomatique de l'arithmétique dans la logique du premier ordre (PA_1) est donc très loin de définir un unique objet. Les modèles de PA_1 différents de $\mathbb{N}$ s'appellent les modèles non standard de l'arithmétique de Peano du premier ordre. Les modèles non standard de PA_1 sont proposés par Thoralf Skolem dans ses articles [Sko33] et [Sko34]. En particulier, il montre que $\mathbb{N}$ a une extension finale élémentaire.

Dans ce mémoire, on va commencer par donner quelques rappels de théorie des modèles qui sont essentiels pour la suite du texte. Ensuite on va définir l'axiomatique de Peano et étudier certaines de ses propriétés. Finalement on va se concentrer sur les extensions de modèles de PA_1. On va examiner les conditions de transfert de la vérité dans les extensions. Dans ce contexte les deux résultats suivants vont être essentiels :

— Le théorème de Robert MacDowell et Ernst Specker [MS61] est une amélioration du résultat de Skolem qui montre que tout modèle de PA_1 a une extension finale élémentaire.

— Le théorème de Haim Gaifman [Gai72],[Gai76].

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Adrien DELORO, maître de conférences à Sorbonne Université, qui m'a encadré tout au long de ce mémoire et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Tuna ALTINEL, maître de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1, pour ses encouragements et conseils.

Chapitre 1

Rappels de théorie des modèles

On attend que le lecteur connaisse les notions suivantes :
— *logique du premier ordre*,
— *théorie*,
— *satisfaction*,
— *modèle*,
— *cohérence*,
— *satisfaisabilité* etc.
Dans l'annexe A, il y a un rappel général de la logique du premier ordre couvrant les définitions des notions ci-dessus.

Dans la suite du texte, on va se concentrer sur le langage du premier ordre particulier $\mathcal{L}_A = \{0, s, +, \cdot\}$. On l'appellera le *langage de l'arithmétique de Peano du premier ordre*. Au lieu de l'ajouter à $\mathcal{L}_A$, on pourra par la suite définir la relation d'ordre et la soustraction de la façon suivante :

$x \leq y$ par $\exists z\, y = x + z$;

$x - y$ par $y \leq x \wedge \exists z\, z + y = x$.

On n'a pas l'intention de définir ce qu'est, ou doit être, la théorie des modèles, néanmoins on peut la voir comme l'étude des propriétés de la *définissabilité*.

Définition 1.0.1. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et E une sous-partie de $\mathcal{M}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. E est *définissable* s'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ telle que :

$$E = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{M}^n : \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

1.1 Quelques résultats fondamentaux de théorie des modèles

On rappelle explicitement que $\models$ est utilisé comme le symbole d'implication sémantique et $\vdash$ comme le symbole d'implication syntaxique. Leur relation en logique du premier ordre est donnée par le théorème ci-dessous.

Théorème 1.1.1 (Théorème de complétude de Gödel)**.** *[Cha15, p. 42] Soient* T *une* $\mathcal{L}$*-théorie du premier ordre et* φ *un* $\mathcal{L}$*-énoncé. Alors,* $\mathsf{T} \vdash \varphi$ *ssi : pour tout modèle* $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$*, on a* $\mathcal{M} \models \varphi$*.* □

Théorème 1.1.2 (Compacité)**.** *Soit* T *une* $\mathcal{L}$*-théorie du premier ordre.* T *est satisfaisable ssi toute partie* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T}$ *finie est satisfaisable.*

Démonstration. Si T est finiment satisfaisable alors elle est cohérente. Comme elle est cohérent, selon le théorème de complétude, elle est satisfaisable. □

Définition 1.1.1. Soient $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ une sous-structure. $\mathcal{M}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathcal{N}$, noté par $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, si pour toute formule $\varphi(\bar{x})$ et tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}).$$

D'après la définition on voit immédiatement que si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Contre-exemple 1.1.1. Le langage du premier ordre $\mathcal{L}_< = \{<\}$ s'appelle le *langage des ordres.* Soient $\mathbb{N}^+$ l'ensemble des entiers positifs, $\mathcal{M} = (\mathbb{N}^+, <)$ et $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ des $\mathcal{L}_<$-structures où la relation $<$ est interprétée comme usuel. $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$.

Observons que $\mathcal{M}$ est *isomorphe* à $\mathcal{N}$. Donc $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. En revanche, pour la $\mathcal{L}_<$-formule

$$\varphi(x) : \forall y \; x < y \vee x = y$$

à paramètre $[x = 1]$, on a $\mathcal{M} \models \varphi(1)$ mais $\mathcal{N} \not\models \varphi(1)$. Donc $\mathcal{M}$ n'est pas une *sous-structure élémentaire* de $\mathcal{N}$.

Pour le langage de l'arithmétique $\mathcal{L}_A$, les entiers sont « codés en dur » dans l'ensemble des termes $\mathsf{Term}_{\mathcal{L}_A}$ de la façon suivante :

Notation 1.1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\underline{n} := s^n(0) \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}_A}$.

D'après la définition on observe que pour chaque $\mathcal{L}_A$-formule à paramètres dans $\mathbb{N}$, il existe un énoncé qui lui est équivalent dans toute extension de $\mathbb{N}$.

Proposition 1.1.1. *Soit* $\mathcal{M}$ *une* $\mathcal{L}_A$*-structure. Alors* $\mathbb{N} \preceq \mathcal{M}$ *ssi* $\mathbb{N} \equiv \mathcal{M}$*.*

Démonstration. Supposons que $\varphi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}_A$-formule et $\bar{a} \in \mathbb{N}$. D'après l'observation, on a $[\mathbb{N} \models \varphi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})]$ ssi $\mathbb{N} \equiv \mathcal{M}$. □

Théorème 1.1.3 (Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant)**.** *[Kay91, p. 4] Soient* $\mathcal{M}$ *une* $\mathcal{L}$*-structure infinie et* κ *un cardinal. Alors* $\mathcal{M}$ *a une extension élémentaire de cardinal* $\lambda \geq \kappa$*.* □

Théorème 1.1.4 (Théorème de Löwenheim-Skolem descendant). *[Kay91, p. 4] Soient $\|\mathcal{L}\| = \lambda \geq \aleph_0$ et $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-structure de cardinal $\kappa > \lambda$. Alors il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ avec $|\mathcal{M}| = \lambda$.* □

Théorème 1.1.5 (Teste de Tarski-Vaught). *[Kay91, p. 4] Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ des $\mathcal{L}$-structures. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *$\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$;*
- *pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{x}, y)$ et pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$, si $\mathcal{N} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$, alors il existe $b \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}, b)$.* □

1.2 Logique du deuxième ordre

Dans la logique du premier ordre (voir l'annexe A), les variables ne peuvent décrire que les *éléments* d'une structure. Donc on ne quantifie que sur les éléments. En revanche, la quantification sur les sous-ensembles, fonctions ou relations d'une structure est « naturelle » en mathématiques. Ceci peut a priori suggérer d'étendre la logique.

Définition 1.2.1. Un *langage du deuxième ordre* se définit en ajoutant les symboles :
- k-aires symboles de constantes d'ensembles (prédicats) P_i^k, pour tout $k \geq 1$;
- k-aires variables d'ensembles (prédicats) X_i^k, pour tout $k \geq 1$;
- quantificateurs $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$

à la liste de symboles du premier ordre.

Ces nouveaux quantificateurs parcourent les sous-ensembles. On donne quelques exemples d'énoncés du deuxième ordre.

Exemple 1.2.1 (Bon ordre). Un ordre total $(E, \leq)$ est un *bon ordre*, si toute partie non vide de E possède un élément minimal.

On peut formaliser ceci par la formule de la logique du deuxième ordre :

$$\mathbb{V}S\ \exists x S(x) \to [\exists x \forall y S(x) \wedge S(y) \to x \leq y].$$

Exemple 1.2.2 (Axiome de la borne supérieure). Toute partie S non-vide et bornée de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On peut formaliser ceci par la formule de la logique du deuxième ordre :

$$\begin{aligned}&\mathbb{V}S\ [\exists x S(x) \wedge (\exists y \forall x S(x)) \to x \leq y]\\ &\to [(\exists z \forall x (S(x)) \to x \leq z \wedge \forall y \forall x S(x) \to (x \leq y \to z \leq y)]\end{aligned}$$

On définit la syntaxe de la logique du deuxième ordre de façon similaire à la syntaxe de la logique du premier ordre. [van04, p. 143] Dans le mémoire, on ne s'intéresse pas à la théorie de la démonstration de la logique du second ordre. La raison de ceci surtout est que d'après le contre-exemple 2.1.1 ; la compacité n'est pas valide pour la logique du deuxième ordre. Donc la complétude non plus.

1.3 Incomplétude

« *Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science.* » [Hil02, p. 14]

Théorème 1.3.1 (Théorème d'incomplétude de Gödel)**.** *Soit* T *une* $\mathcal{L}_A$*-théorie récursivement axiomatisable et cohérente qui étend* PA_1 *(définition 2.1.2). Alors il existe un énoncé* φ *tel que ni* $\mathsf{T} \vdash \varphi$*, ni* $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$*.* □

Le théorème d'incomplétude utilise l'*arithmétique de Peano* (PA_1) définie dans le chapitre 2. On préfère mettre ensemble tous les rappels.

Clairement PA_1 n'est pas complète d'après le théorème d'incomplétude. De plus pour chaque $\mathcal{L}_A$-énoncé φ, on a soit $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ soit $\varphi \notin \mathrm{Th}(\mathbb{N})$. Donc d'après le théorème A.3.3, $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ ne peut pas être donnée par une $\mathcal{L}_A$-théorie récursivement axiomatisable.

Comme dans la suite du texte on en aura peu besoin, on ne donne pas de détails (voire [Kay91, ch. 0 et 3]) sur la *théorie de la calculabilité*, *codage de Gödel* etc.

Définition 1.3.1. Soient $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ une fonction totale et $\mathsf{T} \supseteq \mathrm{PA}_1$ une $\mathcal{L}_A$-théorie. f est *représentée* dans T, s'il existe une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ telle que, pour tout $\bar{n} \in \mathbb{N}^k$:

$$\mathsf{T} \vdash \exists! y \varphi(\bar{n}, y)$$

et

$$\text{si } k = f(\bar{n}) \text{ alors } \mathsf{T} \vdash \varphi(\bar{n}, k).$$

Théorème 1.3.2. *[Kay91, p.36] Soit* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ récursive. *Alors* f *est représentée dans* PA_1. □

Exemple 1.3.1. L'*exponentiation* $(x, y) \mapsto x^y$ est récursive. Donc il existe une formule qui la représente dans PA_1.

Chapitre 2

Axiomatique de Peano

L'axiomatisation de l'arithmétique est proposé par Giuseppe Peano [Pea89] et indépendamment par Richard Dedekind [Ded93].

2.1 Arithmétique de Peano

On commence par décrire le comportement de $\mathbb{N}$ en tant que $\mathcal{L}_A$-structure. La liste ne sera complète qu'avec la formalisation de la récurrence.

Théorie du successeur. Elle est donnée par les axiomes :

S1 $\forall x\, sx \neq 0$;

S2 $\forall x\, x \neq 0 \rightarrow \exists y\, x = sy$;

S3 $\forall x \forall y\, sx = sy \rightarrow x = y$.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de la théorie du successeur. Pour $x \in M$ on définit l'*orbite* de x comme l'ensemble de tous ses successeurs et prédécesseurs. $\mathcal{M}$ contient l'orbite de 0 c'est à dire $0, s0, \ldots, s^n 0, \ldots$ qui est une copie de $(\mathbb{N}, s)$. Les autres orbites peuvent être soit des cycles finis, soit des copies de $(\mathbb{Z}, s)$. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de représentants des orbites de M ; on a bien

$$M = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} [x].$$

Théorie de l'addition. Elle est donnée par les axiomes :

A1 $\forall x\, 0 + x = x$;

A2 $\forall x \forall y\, x + sy = s(x + y)$.

Théorie de la multiplication. Elle est donnée par les axiomes :

M1 $\forall x\, 0 \cdot x = 0$;

M2 $\forall x \forall y\, x \cdot s(y) = x \cdot y + x$.

L'addition (et la multiplication) de $\mathbb{N}$ est associative et commutative mais ce n'est pas évident a priori de la théorie ci-dessus : les propriétés algébriques attendues pourront être démontrées par récurrence une fois celle-ci axiomatisée.

Arithmétique de Peano du deuxième ordre

Définition 2.1.1. La théorie de l'*arithmétique de Peano du deuxième ordre* (PA_2) est formée des axiomes précédents et de l'énoncé du deuxième ordre :

R2 $\mathbb{\forall} p\, [p(0) \wedge \forall x(p(x) \to p(sx))] \to \forall x\, p(x)$.

Le symbole $\mathbb{\forall}$ désigne la *quantification du deuxième ordre*, i.e. la quantification sur les propriétés ; R2 est une formule de la logique du deuxième ordre. Manifestement $\mathbb{N}$ est un modèle de PA_2.

On peut également reformuler R2 en termes de sous-ensembles sous la forme :

R2 $\mathbb{\forall} S \subset M\, [0 \in S \wedge \forall x(\, x \in S \to sx \in S)] \to S = M$.

Proposition 2.1.1. *Tout $\mathcal{L}_A$-modèle de* PA_2 *est isomorphe à* $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de PA_2. Définissons l'application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ par $0 \mapsto 0^{\mathcal{M}}$ et $n \mapsto s^n 0^{\mathcal{M}}$. Alors f est un morphisme car $0 \mapsto 0^{\mathcal{M}}$, $f(sx) = sf(x)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Supposons $n \leq m$ et $s^n 0 = s^m 0$. D'après l'injectivité du successeur on a $s^{m-n}(0) = 0$. Or, 0 n'est pas un successeur. Donc $n = m$ et f est bien injective.

De plus $0 \in \mathrm{Im}\, f$ et pour tout $x \in \mathrm{Im}\, f$ on a $sx \in \mathrm{Im}\, f$. Par R2, $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{M}$. Donc f est surjective. $\square$

À première vue il peut sembler qu'il ne reste plus rien à découvrir dans l'arithmétique de Peano, puisque l'on a trouvé une $\mathcal{L}_A$-théorie catégorique. Néanmoins travailler sur une théorie *du deuxième ordre* a des désavantages. Par exemple ; le théorème de complétude n'est pas valide pour la logique du deuxième ordre (conséquence du résultat célèbre de Gödel : les théorèmes d'incomplétude), ni le théorème de compacité.

Contre-exemple 2.1.1. Considérons la théorie $\mathsf{T} = \mathrm{PA}_2 \cup \{c > \underline{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Toute sous-théorie finie de T est contenu dans $\mathsf{T}_n = \mathrm{PA}_2 \cup \{c > \underline{k}\}_{k<n}$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Or $(\mathbb{N}, n) \models \mathsf{T}_n$. Donc la théorie est finiment satisfaisable. En revanche, comme $\mathbb{N}$ ne possède aucun « élément infini » on a $\mathbb{N} \not\models \mathsf{T}$. Or, d'après la proposition 2.1.1, $\mathbb{N}$ était le seul candidat. En conclusion, T n'est pas satisfaisable bien que toutes ses sous-théories finies le soient.

Arithmétique de Peano du premier ordre

Définition 2.1.2. L'*arithmétique de Peano du premier ordre* (PA_1) est formulée par la théorie du successeur, la théorie de l'addition, la théorie de la multiplication et *le schéma d'axiome de récurrence*

R1 Pour toute formule $p \in \mathsf{Form}_{\mathcal{L}_A}$:
$[p(0) \wedge \forall x(p(x) \to p(sx))] \to \forall x\, p(x)$.

Clairement PA_1 est satisfaite par $\mathbb{N}$. On l'appellera le *modèle standard*. Tous les autres s'appellent *non standard*.

Avant d'avancer vers des sujets plus intéressants on donne quelques exemples de démonstrations de propriétés algébriques attendues.

Proposition 2.1.2. $\mathrm{PA}_1 \models \forall x \forall y \forall z\ (z+y)+x = z+(y+x)$.

Démonstration. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $p(x)$ la formule $\forall y \forall z\ (z+y)+x = z+(y+x)$. Raisonnons par récurrence sur x. Soit $x=0$. Par l'axiome A1 on a $\mathcal{M} \models \forall y \forall z\ (z+y)+0 = z+(y+0)$. Ainsi $\mathcal{M} \models p(0)$. Supposons $\mathcal{M} \models p(x)$ i.e. $\mathcal{M} \models \forall y \forall z\ (z+y)+x = z+(y+x)$ pour un $x \in \mathcal{M}$. Par l'hypothèse de récurrence et A2, $\mathcal{M} \models (z+y)+sx = s((z+y)+x) = s(z+(y+x)) = (z+s(y+x)) = z+(y+sx)$ pour tout $y, z \in \mathcal{M}$. D'après R1 on a $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z\ (z+y)+x = z+(y+x)$. Donc $\mathrm{PA}_1 \models \forall x \forall y \forall z\ (z+y)+x = z+(y+x)$. □

Proposition 2.1.3. $\mathrm{PA}_1 \models \forall x\ 0+x = x+0$.

Démonstration. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $p(x)$ la formule $0+x = x+0$. Raisonnons par récurrence sur x. Soit $x=0$. Par l'axiome A1 on a $\mathcal{M} \models 0+0 = 0$. Ainsi $\mathcal{M} \models p(0)$. À présent supposons $\mathcal{M} \models p(x)$ i.e. $\mathcal{M} \models 0+x = x+0$ pour un $x \in \mathcal{M}$. Par A1, $\mathcal{M} \models 0+x = x+0 = x$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{M} \models s(0+x) = sx$ et $\mathcal{M} \models s(x+0) = sx$. Donc $\mathcal{M} \models p(sx)$. D'après R1 on a $\mathcal{M} \models \forall x\ 0+x = x+0$. Donc $\mathrm{PA}_1 \models \forall x\ 0+x = x+0$. □

Proposition 2.1.4. $\mathrm{PA}_1 \models \forall x\ s0+x = sx$.

Démonstration. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $p(x)$ la formule $s0+x = sx$. Raisonnons par récurrence sur x.Soit $x=0$. Par l'axiome A1 on a$\mathcal{M} models s0+0 = s0$. Supposons $\mathcal{M} \models p(x)$ i.e. $\mathcal{M} \models s0+x = sx$ pour un $x \in \mathcal{M}$. Par A2, $\mathcal{M} \models s0+sx = s(s0+x)$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{M} \models s(s0+x) = s(sx)$. Donc $\mathcal{M} \models p(sx)$. D'après R1 on a $\mathcal{M} \models \forall x s0+x = sx$. Donc $\mathrm{PA}_1 \models \forall x\ s0+x = sx$. □

Proposition 2.1.5. $\mathrm{PA}_1 \models \forall x \forall y\ x+y = y+x$.

Démonstration. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $p(x)$ la formule $\forall y\ x+y = y+x$. Raisonnons par récurrence sur x. Soit $x=0$. D'après la proposition 2.1.3 on a $\mathcal{M} \models p(0)$. Supposons $\mathcal{M} \models p(x)$ i.e. $\mathcal{M} \models \forall y\ x+y = y+x$ pour un

$x \in \mathcal{M}$. Donc, $\mathcal{M} \models x + y = y + x$ pour tout $y \in \mathcal{M}$. Par les propositions 2.1.2, 2.1 et A2, $\mathcal{M} \models sx + y = s(x + 0) + y = (x + s0) + y = x + (s0 + y) = x+(y+s0) = (x+y)+s0 = (y+x)+s0 = y+(x+s0) = y+s(x+0) = y+sx$ pour tout $y \in \mathcal{M}$. D'après R1 on a $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \; x + y = y + x$. Donc $\mathrm{PA}_1 \models \forall x \forall y \; x + y = y + x$. □

Le reste des propriétés algébriques attendues peut être démontré d'une manière similaire. [Ded93]

Soit $\varphi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}_A$-formule. On propose l'énoncé $L_x\varphi$:

$$\forall \bar{y} \exists x \varphi(x, \bar{y}) \to \exists z(\varphi(z, \bar{y}) \wedge \forall w < z \neg\varphi(w, \bar{y})).$$

Théorème 2.1.1 (Schéma de minimisation)**.** *[Kay91, p. 45]* $\mathrm{PA}_1 \vdash L_x\varphi$ *pour toute* $\mathcal{L}_A$*-formule* φ. □

Construction d'un modèle non standard

Comme $\mathbb{N}$ est de cardinal $\aleph_0$, d'après le théorème de Löwenheim-Skolem (ascendant), il existe des modèles de cardinal quelconque de PA_1. Par cet argument on voit immédiatement que PA_1 a plusieurs modèles non isomorphes. Tout modèle de PA_1 non isomorphe à $\mathbb{N}$ est dit *non standard*. Est-ce qu'on peut en « construire » un ?

On étend $\mathcal{L}_A$ en ajoutant un nouveau symbole de constante c et on le note $\mathcal{L}_c$. Considérons la $\mathcal{L}_c$-théorie

$$\mathsf{T} = \mathrm{PA}_1 \cup \{\underline{n} < c\}_{n \in \mathbb{N}}$$

où $\underline{n}$ désigne le terme $s^n(0)$ comme à la notation 1.1.2.

Toute sous-théorie finie de T est contenue dans

$$\mathsf{T}_k = \mathrm{PA}_1 \cup \{\underline{n} < c : n < k\}$$

pour un $k \in \mathbb{N}$. Manifestement $(\mathbb{N}, k) \models \mathsf{T}_k$. D'après le théorème de compacité, $\mathsf{T} = \cup_k \mathsf{T}_k$ est satisfaisable, i.e. il existe un $\mathcal{L}_c$-modèle $\mathcal{M}$ de T. Une $\mathcal{L}_c$-structure est forcément une $\mathcal{L}_A$-structure en oubliant le symbole de constante supplémentaire c. En particulier on a $\mathcal{M} \models \underline{n} < c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc l'interprétation de $c^{\mathcal{M}}$ n'est pas un « entier ». On conclut que les $\mathcal{L}_A$-structures $\mathbb{N}$ et $\mathcal{M}$ ne peuvent pas être isomorphes.

Observons que si l'on considère la $\mathcal{L}_c$-théorie

$$\mathsf{T} = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\underline{n} < c\}_{n \in \mathbb{N}},$$

on peut montrer la cohérence de T, i.e. il existe une $\mathcal{L}_c$-structure $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$, en appliquant le même raisonnement. Comme $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, d'après la proposition 1.1.1, on conclut qu'il existe une extension élémentaire $\mathbb{N} \preceq \mathcal{M}$ non standard.

Le plongement canonique

Si $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ on définit le *plongement canonique* $f : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ par $n \mapsto s^n 0^{\mathcal{M}}$. Elle est clairement bien définie et injective. En outre l'application f est un plongement de $\mathcal{L}_A$-structures.

Donc tout modèle de PA_1 contient une copie de $\mathbb{N}$ ou par abus de langage $\mathbb{N}$ est une sous-structure de tout modèle de PA_1. Tout élément $x \in M \setminus \mathrm{Im}\, f$ est dit *non standard.* On conclut tautologiquement qu'un modèle de PA_1 est non standard s'il contient des éléments non standard.

2.2 Structure d'ordre

À partir de la relation d'ordre usuel sur $\mathbb{N}$, on va définir un ordre sur tous les modèles de PA_1.

Définition 2.2.1. Soit E un ensemble. La relation $<$ est un *ordre* sur E si la $\mathcal{L}_<$-structure (voir le contre-exemple 1.1.1) $(E, <)$ vérifie les axiomes :
O1 $\forall x \neg x < x$ (*non réflexivité*) ;
O2 $\forall x \forall y \forall z\ [(x < y \wedge y < z) \to x < z]$ (*transitivité*).

Définition 2.2.2. Un ordre $(E, <)$ est appelé *total* (ou *linéaire*) s'il vérifie l'axiome :
O3 $\forall x \forall y\ [(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)]$ (*totalité*).

L'abréviation $x \leq y$ désigne $(x < y) \vee (x = y)$.

Soit $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ une $\mathcal{L}_A$-structure. On définit la relation « $<$ » sur $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$x < y \text{ ssi } \exists z\ (z \neq 0) \wedge (x + z = y).$$

On peut démontrer par récurrence que $\mathcal{M} \models \{\mathrm{O1}, \mathrm{O2}, \mathrm{O3}\}$. Donc on peut désormais voir $\mathcal{M}$ comme une $\mathcal{L}_<$-structure et on se permet d'employer le symbole non logique $<$ dans les formules. En outre comme $\mathcal{M}$ est un modèle arbitraire de PA_1, on conclut que $\mathrm{PA}_1 \vdash \{\mathrm{O1}, \mathrm{O2}, \mathrm{O3}\}$.

PA_1 implique aussi les propriétés suivantes :
OA $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \to x + z < y + z)$;
OM $\forall x \forall y \forall z\ (0 < z \wedge x < y \to x \cdot z < y \cdot z)$
qui décrivent $+$ et $\cdot$ par rapport à l'ordre. Ceci peut être démonté par récurrence.

Définition 2.2.3. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de PA_1. On définit la *soustraction* sur $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$a - b := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{M} \models a \leq b \\ c \in \mathcal{M} \text{ tel que } \mathcal{M} \models b + c = a & \text{si } \mathcal{M} \models a > b. \end{cases}$$

Définition 2.2.4. Un ordre est appelé *discret à plus petit élément 0* s'il vérifie les axiomes :

OD1 $\forall x \exists y \forall z\, x \leq y \wedge (x < z \rightarrow y \leq z)$;
OD2 $\forall x\, 0 \leq x$;
OD3 $\forall x \exists y \forall z\, x \neq 0 \rightarrow y \leq x \wedge (z < x \rightarrow z \leq y)$.

On vérifie par récurrence que l'ordre défini sur les modèles de PA_1 est discret à plus petit élément 0. À présent on étudie quelques propriétés élémentaires de l'ordre dans un modèle de PA_1.

Proposition 2.2.1. $\mathrm{PA}_1 \vdash \forall x \forall y\, (y > x \rightarrow y \geq x + \underline{1})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$. Supposons $\mathcal{M} \models y > x$ pour $x, y \in \mathcal{M}$. Alors par définition de l'ordre sur $\mathcal{M}$, il existe $z \in \mathcal{M}$ tel que $z \neq 0$ et $y = x + z$.

On étudie d'abord le cas pour $x = 0$. Supposons que $\mathcal{M} \models y > 0 \rightarrow y \geq \underline{1}$ et $\mathcal{M} \models y + \underline{1} > 0$ pour $y \in \mathcal{M}$. Alors $\mathcal{M} \models y + \underline{1} \geq \underline{1}$ (sinon $\mathcal{M} \models y + \underline{1} < \underline{1}$ ss'il existe $z \in \mathcal{M}$ tel que $z > 0$ et $y + 1 + z = 1$ dans $\mathcal{M}$ ssi $y + z = 0$ dans $\mathcal{M}$ qui est absurde). Par récurrence on a $\mathcal{M} \models \forall y\, (y > 0 \rightarrow y \geq \underline{1})$.

Donc $z \geq 1$ dans $\mathcal{M}$. Par OA $y = z + x \geq x + 1$ dans $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{M} \models \forall x \forall y\, (y > x \rightarrow y \geq x + \underline{1})$. □

Proposition 2.2.2. *Soient $\mathcal{M}$ un modèle de* PA_1 *et pour $n \in \mathbb{N}$ la formule :*

$$\varphi_n : \forall x\, x \leq \underline{n} \rightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = \underline{n}.$$

Alors $\mathcal{M} \models \varphi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$. Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a $\mathcal{M} \models \varphi_0$ par OD2. Supposons $\mathcal{M} \models \varphi_n$ i.e. $\mathcal{M} \models \forall x\, x \leq \underline{n} \rightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = \underline{n}$. Alors $\mathcal{M} \models \forall x (x \leq \underline{n+1} \rightarrow x \leq \underline{n} \vee x = \underline{n+1})$ par la proposition 2.2.1. Donc $\mathcal{M} \models \forall x\, x \leq \underline{n+1} \rightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = \underline{n} \vee x = \underline{n+1}$. □

Définition 2.2.5. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{L}$-structures. $\mathcal{N}$ est appelée une *extension finale* de $\mathcal{M}$ (ou également $\mathcal{M}$ est appelée une *sous-structure initiale* de $\mathcal{N}$), désigné par $\mathcal{M} \subseteq_f \mathcal{N}$ ssi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ et pour tous $m, n \in \mathcal{N}$:

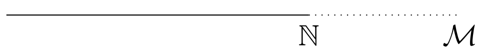
$$\text{si } \mathcal{N} \models n < m \text{ et } m \in \mathcal{M}, \text{ alors } n \in \mathcal{M}.$$

Théorème 2.2.1. *Soit $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$. Alors $\mathbb{N} \subseteq_f \mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ le plongement canonique (voir 2.1) défini par $n \mapsto \underline{n}^{\mathcal{M}}$. D'après la proposition 2.2.2,

$$\mathrm{Im}(h) = \{\underline{n}^{\mathcal{M}} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq_f \mathcal{M}.$$

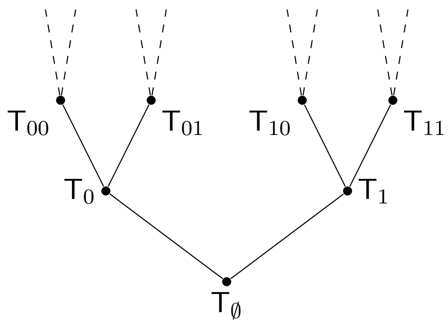
□



Le dessin ci-dessus est donc approprié pour imaginer un modèle non standard de PA_1.

2.3 Nombre de complétions de PA_1

Théorème 2.3.1. *Soit* $\mathsf{T} \supseteq \mathrm{PA}_1$ *une* $\mathcal{L}_A$*-théorie récursivement axiomatisable et cohérente. Alors* T *a* $2^{\aleph_0}$ *complétions.*



Démonstration. Soit $\mathsf{T} \supseteq \mathrm{PA}_1$ une théorie récursive et cohérente. D'après le théorème A.3.3, il existe un énoncé φ_T tel que $\mathsf{T} \cup \{\varphi_\mathsf{T}\}$ et $\mathsf{T} \cup \{\neg\varphi_\mathsf{T}\}$ sont cohérentes. Soit s_n une suite finie de 0 et 1 où n décrit sa longueur. On axiomatise l'extension récursive T_{s_n} de T par récurrence :

— $\mathsf{T}_\emptyset = \mathsf{T}$;
— $\mathsf{T}_{s_n 0} = \mathsf{T} \cup \{\neg\varphi_{\mathsf{T}_{s_n}}\}$;
— $\mathsf{T}_{s_n 1} = \mathsf{T} \cup \{\varphi_{\mathsf{T}_{s_n}}\}$.

T_{s_n} est une extension finie de T pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par construction elle est cohérente.

Soit $s : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ une suite. On définit la théorie récursive $\mathsf{T}_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{T}_{s_n}$. Donc T_s est cohérente par construction. De plus elle est contenue dans une complétion de T.(voir le théorème A.3.1).

Observons que cette extension récursive peut être représentée par un *arbre* comme au dessus. Donc, chaque complétion correspond à une « *branche* » de l'arbre. Le cardinal de branches de l'arbre est bien $2^{\aleph_0}$. □

Donc Th($\mathbb{N}$) n'est que l'une des $2^{\aleph_0}$ complétions de PA_1.

Chapitre 3

Extensions de modèles

3.1 Le nombre d'extensions élémentaires dénombrables de $\mathbb{N}$

On a déjà montré qu'il existe un infinité de modèles non isomorphes de PA_1 avec un argument sur le cardinal. En revanche on peut vouloir se limiter aux modèles dénombrables en espérant démontrer un résultat d'unicité.

D'après la proposition A.2.1, il existe « au plus » $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables de PA_1 à isomorphisme près. Donc il existe « au plus » $2^{\aleph_0}$ extensions élémentaires dénombrables de $\mathbb{N}$ à isomorphisme près.

Théorème 3.1.1. *Il y a $2^{\aleph_0}$ extensions élémentaires dénombrables de $\mathbb{N}$ à isomorphisme près.*

Démonstration. Soient $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $S \subset \mathbb{P}$. Considérons la théorie

$$\mathsf{T}_S = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\exists x\ \underline{p} \cdot x = c\}_{p \in S} \cup \{\forall x\ \underline{p} \cdot x \neq c\}_{p \notin S}.$$

Toute partie finie de T_S est contenue dans

$$\mathsf{T}_n = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\exists x\ \underline{p} \cdot x = c\}_{p \in S \wedge p < n} \cup \{\forall x\ \underline{p} \cdot x \neq c\}_{p \notin S \wedge p < n}$$

pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $q = \prod_{p \in S \wedge p < n} p$; alors $(\mathbb{N}, q) \models \mathsf{T}_n$. D'après le théorème de compacité, T_S est satisfaisable. Soit $\mathcal{N}_S$ un modèle de T_S. D'après le théorème de Löwenheim-Skolem (descendant) il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}_S \preceq \mathcal{N}_S$ de T_S.

$\mathcal{P}(\mathbb{P})$ désigne l'ensemble des parties des entiers premiers et $\mathsf{Mod}_{\aleph_0}(\mathrm{Th}(\mathbb{N}))$ désigne l'ensemble des extensions élémentaires dénombrables de $\mathbb{N}$ à isomorphisme près. On définit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\mathbb{P}) &\to \mathsf{Mod}_{\aleph_0}(\mathrm{Th}(\mathbb{N})) \\ S &\mapsto \mathcal{M}_S \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_S$ est un modèle dénombrable de T_S.

Observons que pour un $S \subseteq \mathbb{P}$ fixé, $f(S) = \mathcal{M}_S$ peut être un modèle de $\mathsf{T}_{S'}$ où $S \neq S' \subseteq \mathbb{P}$. Définissons la relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(S)$ par :

$$S \sim S' \text{ ssi } f(S) = f(S').$$

Ceci est une *relation d'équivalence.*

Soit $\mathcal{M} \in \mathsf{Mod}_{\aleph_0}(\mathrm{Th}(\mathbb{N}))$, alors il peut être un modèle de T_S pour au maximum $\aleph_0$ parties $S \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$, i.e. la classe d'équivalence $f^{-1}(\mathcal{M})$ contient au maximum $\aleph_0$ sous-ensembles de $\mathbb{P}$. Or le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ est $2^{\aleph_0}$. Donc le cardinal de l'ensemble de classes d'équivalence $\mathcal{P}(\mathbb{P})/\sim$ est supérieur ou égal à $2^{\aleph_0}$. Comme l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathcal{P}(\mathbb{P})/\sim\ &\to \mathsf{Mod}_{\aleph_0}(\mathrm{Th}(\mathbb{N})) \\ [S] &\mapsto \mathcal{M}_S \end{aligned}$$

est une injection, il existe au moins $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$. □

Corollaire 3.1.1.1. *Il existe* $2^{\aleph_0}$ *modèles dénombrables de* PA_1 *à isomorphisme près.* □

3.2 Hiérarchie arithmétique

On va définir certaines classes de $\mathcal{L}_A$-formules. Ensuite on va étudier leurs conditions du transfert de la vérité pour les $\mathcal{L}_A$-structures.

Définition 3.2.1. Soit t un $\mathcal{L}_A$-terme. Un quantificateur est *borné* s'il est de la forme :

— $\exists x(x < t \wedge \cdots)$;

— $\forall x(x < t \to \cdots)$.

On emploie respectivement les abréviations $\exists x < t(\cdots)$ et $\forall x < t(\cdots)$.

Définition 3.2.2. Une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(\bar{x})$ est de classe Δ_0, si elle est équivalente à une formule dans laquelle tout quantificateur est borné.

Définition 3.2.3. Une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(\bar{x})$ est de classe Σ_1, si elle est équivalente à une formule de la forme $\exists \bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$ avec $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_0$.

Définition 3.2.4. Une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(\bar{x})$ est de classe Π_1, si elle est équivalente à une formule de la forme $\forall \bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$ avec $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_0$.

Observons que Σ_1 et Π_1 sont stables par $\wedge$ et $\vee$. Par exemple : soit $\exists y\varphi_1(\bar{x}, y)$ et $\exists y\varphi_2(\bar{x}, y)$ de Σ_1. Alors leur disjonction, qui équivaut à $\exists y\exists z\varphi_1(\bar{x}, y) \vee \varphi_2(\bar{x}, z)$, l'est aussi. De plus, la négation d'une formule Σ_1 est Π_1 et la réciproque est aussi vraie.

Définition 3.2.5. Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ des $\mathcal{L}_A$-structures et Γ un ensemble de $\mathcal{L}_A$-formules. $\mathcal{M}$ est une *sous-structure* Γ*-élémentaire* de $\mathcal{N}$, noté $\mathcal{M} \preceq_\Gamma \mathcal{N}$ si pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\varphi(\bar{x}) \in \Gamma$;

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}).$$

Si $\mathcal{M} \preceq_\Gamma \mathcal{N}$ alors Γ est dit *absolu* pour l'extension $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Théorème 3.2.1. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{L}_A$-structures. Si $\mathcal{N}$ est une extension finale de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{M} \preceq_{\Delta_0} \mathcal{N}$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la complexité des Δ_0-formules.

Une $\mathcal{L}_A$-formule atomique (i.e. une formule de complexité $n = 0$) est de forme $t(\bar{x}) = t'(\bar{x})$ pour $t, t' \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}_A}$. Donc clairement $\mathcal{M} \models t(\bar{a}) = t'(\bar{a})$ ssi $\mathcal{N} \models t(\bar{a}) = t'(\bar{a})$ pour $\bar{a} \in \mathcal{M}$.

Faisons l'hypothèse de récurrence : pour toute $\varphi(\bar{x}) \in \Delta_0$ de complexité inférieure ou égale à n et pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}). \tag{$\star$}$$

Supposons que $\varphi(\bar{x})$ est $\varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})$, de complexité $n+1$. Pour $\bar{a} \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) &\text{ ssi } \mathcal{M} \models \varphi_1(\bar{a}) \text{ et } \mathcal{M} \models \varphi_2(\bar{a}) \\ \text{par } (\star) &\text{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi_1(\bar{a}) \text{ et } \mathcal{N} \models \varphi_2(\bar{a}) \\ &\text{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}). \end{aligned}$$

Les cas où $\varphi(\bar{x})$ est $\varphi_1(\bar{x}) \vee \varphi_2(\bar{x})$ ou $\neg\varphi_1(\bar{x})$ de complexité $n+1$ sont montrés par des arguments similaires.

Supposons que $\varphi(\bar{x})$ est $\exists y < t(\bar{x})\varphi_1(\bar{x}, y)$, de complexité $n+1$. Pour $\bar{a} \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ ss'il existe $b < t(\bar{a}) \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi_1(\bar{a}, b)$. Or comme $\mathcal{M} \subseteq_f \mathcal{N}$ et $t(\bar{a}) \in \mathcal{M}$,

$$\{b \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models b < t(\bar{a})\} = \{b \in \mathcal{N} : \mathcal{N} \models b < t(\bar{a})\}.$$

Donc par $(\star)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) &\text{ ss'il existe } b < t(\bar{a}) \in \mathcal{N} \text{ tel que } \mathcal{N} \models \varphi_1(\bar{a}, b) \\ &\text{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}). \end{aligned}$$

Le cas $\varphi(\bar{x})$ est $\forall y < t(\bar{x})\varphi_1(\bar{x}, y)$ de complexité $n+1$ est montré par un argument similaire. $\square$

Corollaire 3.2.1.1. *Soient $\mathcal{M} \subseteq_f \mathcal{N}$ une extension finale de $\mathcal{L}_A$-structures et $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$ des $\mathcal{L}_A$-formules avec $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_1$ et $\psi(\bar{x}) \in \Pi_1$. Alors pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$:*

1. *si $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$, alors $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$;*

2. si $\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$, alors $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Démonstration. Soient $\varphi(\bar{x})$ équivalent à la Σ_1-formule $\exists y \varphi_1(\bar{x}, y)$ avec $\varphi_1 \in \Delta_0$ et $\bar{a} \in \mathcal{M}$. Supposons que $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$. Alors il existe $b \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi_1(\bar{a}, b)$. Comme $\varphi_1 \in \Delta_0$, d'après le théorème 3.2.1, on a $\mathcal{N} \models \varphi_1(\bar{a}, b)$. Donc $\mathcal{N} \models \exists y \varphi_1(\bar{a}, y)$, i.e. $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$.

Soient $\psi(\bar{a})$ équivalent à la Π_1-formule $\forall y \psi_1(\bar{x}, y)$ avec $\psi_1 \in \Delta_0$ et $\bar{a} \in \mathcal{M}$. Supposons que $\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$, i.e. $\mathcal{N} \models \psi_1(\bar{a}, b)$, pour tout $b \in \mathcal{N}$. Comme $\psi_1 \in \Delta_0$, d'après le théorème 3.2.1, on a $\mathcal{M} \models \psi_1(\bar{a}, b)$ pour tout $b \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M} \models \forall y \varphi_1(\bar{a}, y)$ i.e. $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$. $\square$

Définition 3.2.6. Une formule est Σ_{n+1} si elle est équivalente à une formule de la forme :

$$\exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

où φ est Π_n.

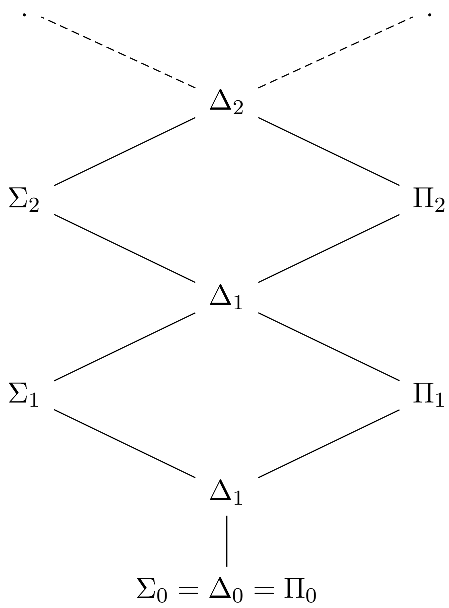
Définition 3.2.7. Une formule est Π_{n+1} si elle est équivalente à une formule de la forme :

$$\exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

où φ est Σ_n.

Définition 3.2.8. Une formule est Δ_n si elle est à la fois Σ_n et Π_n.

Toute formule de la logique du premier ordre est dans Σ_n ou Π_n pour un $n \in \mathbb{N}$. Observons les inclusions $\Sigma_n \subseteq \Delta_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ et $\Pi_n \subseteq \Delta_n \subseteq \Pi_{n+1}$. La *hiérarchie arithmétique* peut être visualisée par le dessin ci-dessous.



La hiérarchie arithmétique n'est pas dégénérée i.e. $\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$ et $\Pi_n \neq \Pi_{n+1}$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

3.3 « Overspill »

Soient $\mathcal{M}$ un modèle non standard de PA_1 et $a \in \mathcal{M}$ non standard. Définissons la partie :

$$\mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}} = \{b \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models b < a^n \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observons que $\mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}}$ est stable sous $+, \cdot, s$. C'est donc une $\mathcal{L}_A$-structure. De plus $\mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}} \subseteq_f \mathcal{M}$ est une extension finale.

Par l'exemple 1.3.1, l'exponentiel $z = x^y$ est représentée dans PA_1 par une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(x, y, z)$. Pour tout $x, y \in \mathcal{M}$ il existe unique $z \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(x, y, z)$. Alors pour $a \in \mathcal{M}$ il existe un unique élément $a^a \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(a, a, a^a)$.

Comme $a > \mathbb{N}$, on a $a^a > b$ pour tout $b \in \mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}}$. Ainsi $\mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}} \neq \mathcal{M}$. De même, $\mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}} \not\models \mathrm{PA}_1$. On conclut naïvement que $\mathcal{M}_{<a^{\mathbb{N}}}$ est « trop petit » pour satisfaire PA_1.

Cette fois on définit la partie :

$$\mathcal{M}_{<<a} = \{b \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models b < a^{a^n} \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\}.$$

Clairement $\mathcal{M}_{<<a} \subseteq_f \mathcal{M}$. Mais $\mathcal{M}_{<<a} \not\models \mathrm{PA}_1$ comme $a, a^a \in \mathcal{M}_{<<a}$ mais $a^{a^a} > \mathcal{M}_{<<a}$.

On peut donc trouver des segment initiaux pour $\mathcal{M}$ facilement en employant la stratégie ci-dessus. Néanmoins afin de construire une sous-structure initial satisfaisant PA_1 on doit changer cette perspective.

Définition 3.3.1. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et I une partie non vide de M. Alors I est un *segment initial clos* de $\mathcal{M}$ s'il vérifie :
— pour tout $y \in I$, si $x < y$, alors $x \in I$;
— I est stable par successeur.

Proposition 3.3.1. *Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ non standard et $I \subsetneq \mathcal{M}$ un segment initial clos propre de $\mathcal{M}$. Alors I n'est pas définissable.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que la $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(x, \bar{a})$ à paramètres $\bar{a} \in \mathcal{M}$ définit $I \subsetneq \mathcal{M}$. Comme $0 \in I$ et que I est stable sous s, $\mathcal{M} \models \varphi(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{a}) \to \varphi(sx, \bar{a}))$. Or $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$, donc par récurrence $\mathcal{M} \models \forall x \varphi(x, \bar{a})$. Donc $I = \mathcal{M}$. □

Théorème 3.3.1 (Overspill de Robinson)**.** *Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ non standard et $I \subsetneq \mathcal{M}$ un segment initial clos propre de $\mathcal{M}$. Supposons que $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\varphi(x, \bar{a})$ soit une $\mathcal{L}_A$-formule tels que :*

$$\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a}) \text{ pour tout } b \in I.$$

Alors il existe $c > I$ dans $\mathcal{M}$ tel que :

$$\mathcal{M} \models \forall x \leq c\, \varphi(x, \bar{a}).$$

Démonstration. Soient $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\varphi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}_A$-formule. Supposons par l'absurde que $\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a})$ pour tout $b \in I$ et il n'existe aucun $c > I$ dans $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \forall x \leq c\, \varphi(x, \bar{a})$.

Considérons la partie

$$E = \{d \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \forall x < d\, \varphi(x, \bar{a})\}$$

définie par la formule $\forall x < y\, \varphi(x, \bar{a})$.

Soit $b \in I$. Alors comme I est un segment initial clos de $\mathcal{M}$, pour tout $x < b$ dans $\mathcal{M}$ on a $x \in I$. Par l'hypothèse, on a $\mathcal{M} \models \varphi(x, \bar{a})$ pour tout $x \in I$. Alors $\mathcal{M} \models \forall x < b\, \varphi(x, \bar{a})$. Donc $b \in E$ i.e. $I \subseteq E$.

De plus, par l'hypothèse, il n'existe aucun $c > I$ dans $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \forall x \leq c\, \varphi(x, \bar{a})$. Alors il n'existe aucun $c \in E$ tel que $c > I$. Donc $E = I$. Or comme I est un segment initial clos propre de $\mathcal{M}$, c'est absurde par la proposition 3.3.1. □

3.4 Extensions finales et cofinales

Soit T une complétion de PA_1. On va construire le « plus petit » modèle de T dans la première partie de cette section. Ensuite on va appliquer les résultats de la première partie pour montrer que tout modèle de PA_1 a une extension finale élémentaire. On va finir la section avec une discussion sur les extensions cofinales.

Définition 3.4.1. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $A \subseteq \mathcal{M}$. Un élément $b \in \mathcal{M}$ est *définissable* dans $\mathcal{M}$ sur A s'il existe une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(x, \bar{y})$ et un uplet $\bar{a} \in A$ tels que

$$\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a}) \text{ et } \mathcal{M} \models \exists! x\, \varphi(x, \bar{a}).$$

On note $\mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A)$ l'ensemble de tous les éléments définissables de $\mathcal{M}$ sur A. Si A est vide on note simplement $\mathsf{dcl}(\mathcal{M})$.

Théorème 3.4.1. *Si $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $A \subseteq \mathcal{M}$ alors $A \subseteq \mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A) \preceq \mathcal{M}$. Donc $\mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A) \models \mathrm{PA}_1$.*

Démonstration. Soit $a \in A$, alors il est définissable par la formule $x = a$. Supposons $x, y \in \mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A)$ définis respectivement par les formules $\xi(x, \bar{a})$ et $\iota(x, \bar{b})$ à paramètres $\bar{a}, \bar{b} \in A$. Alors $x \cdot y$ et $x + y$ (donc sx d'après le fait que $\mathrm{PA}_1 \vdash sx = x + \underline{1}$) sont définis respectivement par les formules :
- $\exists u \exists v\, \xi(u, \bar{a}) \wedge \iota(v, \bar{b}) \wedge z = u \cdot v$ et ;
- $\exists u \exists v\, \xi(u, \bar{a}) \wedge \iota(v, \bar{b}) \wedge z = u + v$.

Donc $\mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A)$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$.

On utilise le teste de Tarski-Vaught 1.1.5 pour montrer que $\mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A) \preceq \mathcal{M}$. Soit $\varphi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}_A$-formule. Supposons $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{c})$ à paramètres $\bar{c} \in \mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A)$. Soit $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ et chaque c_i est défini par la formule $\xi_i(x, \bar{a})$ à paramètres $\bar{a} \in A$. Alors

$$\mathcal{M} \models \exists x \exists \bar{y}(\bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(y_i, \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{y})).$$

Par le schéma de minimisation nombre 2.1.1,

$$\mathcal{M} \models \exists x\ [\exists \bar{y}(\bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(y_i, \bar{a}) \wedge \varphi(x\bar{y}))$$
$$\wedge \forall z < x \forall \bar{w}(\bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(w_i, \bar{a}) \to \neg\varphi(z, \bar{w}))].$$

La formule ci-dessus entre crochets définit un élément $d \in \mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A)$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(d, \bar{c})$. □

Définition 3.4.2. Soient T une complétion de PA_1 et $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$. On note $\mathsf{dcl}_\mathsf{T} = \mathsf{dcl}(\mathcal{M})$, appelé le *modèle premier* de T.

Théorème 3.4.2. *[Kay91, p. 92] Soient* T *une complétion de* PA_1 *et* $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$. *Alors il existe un unique* plongement élémentaire $\mathsf{dcl}_\mathsf{T} \hookrightarrow \mathcal{M}$. *En outre l'image du plongement est égal à* $\mathsf{dcl}(\mathcal{M})$. □

Donc par le théorème 3.4.2, la définition de dcl_T ne dépend que de T. La morale des corollaire suivants est que dcl_T est « petit ».

Corollaire 3.4.2.1. *[Kay91, p. 92] Soit* T *une complétion de* PA_1. *Alors* dcl_T *est* minimal *i.e. il n'a pas de sous-structure élémentaire.* □

Exemple 3.4.1. Pour $T = \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ on a $\mathsf{dcl}_\mathsf{T} = \mathbb{N}$ comme $\mathbb{N}$ est une $\mathcal{L}_A$-structure minimale satisfaisant T.

Définition 3.4.3. Soit T une théorie. Un *type* $p(\bar{x})$ sur T est un ensemble de formules $\varphi(\bar{x})$ tel que la théorie

$$\mathsf{T} \cup \{\varphi(\bar{c}) : \varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})\}$$

(où $\bar{c}$ est un uplet de nouvelles constantes) est cohérente.

Le type $p(\bar{x})$ est ;

— *complet*, si la théorie $\mathsf{T} \cup p(\bar{x})$ est complet ;

— *principal*, s'il existe une formule $\psi(\bar{x})$ telle que $\mathsf{T} \cup p(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ et $\mathsf{T} \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$ pour toute $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$;

— *réalisé* dans un modèle $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$, s'il existe $\bar{a} \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ pour toute $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$; sinon on dit que $\mathcal{M}$ *omet* $p(\bar{x})$.

Observons que d'après le théorème de complétude, si $p(\bar{x})$ est un type sur T, alors il existe un modèle $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$ qui réalise $p(\bar{x})$.

Corollaire 3.4.2.2 (Omission des types)**.** *Soient $\mathcal{L}_C$ une expansion de $\mathcal{L}_A$ obtenue ajoutant un ensemble C de constantes et $\mathsf{T} \supseteq \mathrm{PA}_1$ une $\mathcal{L}_C$-théorie complète. Alors il existe un modèle $\mathcal{K}$ de T tel que pour tout type complet $p(\bar{x})$ sur T,*

$$\mathcal{K} \textit{ réalise } p(\bar{x}) \textit{ ssi } p(\bar{x}) \textit{ est principal.}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$ et $A \subseteq \mathcal{M}$ la partie qui interprète C. Soit $\mathcal{K} = \mathsf{dcl}(\mathcal{M}; A)$. D'après le théorème 3.4.1, $A \subseteq \mathcal{K} \preceq \mathcal{M}$, donc $\mathcal{K} \models \mathsf{T}$. Soit $p(\bar{x})$ un type complet sur T.

Supposons que $p(\bar{x})$ est réalisé par $\bar{a} \in \mathcal{K}$. Soit $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ avec a_i défini dans $\mathcal{M}$ par la formule $\xi_i(x, \bar{c})$ où $\bar{c} \in A$, i.e. $\mathcal{M} \models \xi_i(a_i, \bar{c})$ et $\mathcal{M} \models \exists! x \xi_i(x, \bar{c})$. Alors

$$\mathcal{K} \models \exists! \bar{x} \bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(x_i, \bar{c}). \tag{$\star$}$$

Observons que $\bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(x_i, \bar{c})$ n'est satisfaite que par $\bar{a} \in K$. Alors on a

$$\mathcal{K} \models \forall \bar{x} \bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(x_i, \bar{c}) \to \varphi(\bar{x})$$

pour toute $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$. Comme $p(\bar{x})$ est complet, par $(\star)$ on a $\mathsf{T} \cup p(\bar{x}) \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i(x_i, \bar{c})$. Donc $p(\bar{x})$ est principal.

Réciproquement, supposons que $p(\bar{x})$ est principal, i.e. pour la formule $\psi(\bar{x})$ on a $\mathsf{T} \cup p(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ et $\mathsf{T} \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$ pour toute $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$. Comme T est complète et $\mathsf{T} \cup p(\bar{x})$ est cohérente, $\mathsf{T} \vdash \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$. Donc $\mathcal{K} \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$ et $p(\bar{x})$ est réalisé dans $\mathcal{K}$. □

Tout type principal $p(\bar{x})$ sur une théorie complète T est réalisé dans tout modèle $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$.

Extensions finales

Théorème 3.4.3 (MacDowell et Specker)**.** *Tout modèle $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ a une extension finale élémentaire propre.*

On propose une esquisse de la démonstration du théorème de MacDowell et Specker. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ et $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})$ l'extension du $\mathcal{L}_A$ obtenue en ajoutant un symbole de constante pour chaque élément de $\mathcal{M}$. La stratégie de la démonstration est comme suit :

Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{K}$ avec $\mathcal{K}$ une extension finale de $\mathcal{M}$ et $c \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{M}$, alors $\mathcal{K}$ satisfait la théorie

$$\{\varphi(\bar{a}) : \bar{a} \in \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}), \varphi \text{ est une } \mathcal{L}_A\text{-formule}\} \cup \{c > a\}_{a \in \mathcal{M}}$$

dans le langage $\mathcal{L}_A(\mathcal{M}) \cup \{c\}$. De plus comme $\mathcal{K}$ est une extension finale de $\mathcal{M}$, il omet les types

$$p_a(x) = \{x < a\} \cup \{x \neq b : b \in \mathcal{M} \models b \leq a\}.$$

On va définir $\mathcal{K} = \mathsf{dcl}(\mathcal{N}; \mathcal{M} \cup \{c\})$ pour une $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ et un $c \in \mathcal{N}$ appropriés. Avant de commencer à construire $\mathcal{N}$ et c on fait une observation. Supposons qu'on trouve un $\mathcal{K} \succeq \mathcal{M}$ avec $\mathcal{M} \subseteq_f \mathcal{K}$ et $c \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{M}$. Alors pour toute formule $\varphi(x, \bar{y})$ et pour tout $\bar{b} \in \mathcal{M}$, si $\mathcal{K} \models \varphi(c, \bar{b})$ alors $\mathcal{M} \models \forall z \exists x(x > z \wedge \varphi(x, \bar{b}))$. Autrement dit, $\varphi(x, \bar{b})$ est satisfaite par les éléments d'un sous-ensemble non borné de $\mathcal{M}$. On va désigner la formule $\forall z \exists x(x > z \wedge \varphi(x, \bar{b}))$ par l'abréviation $\exists_{cof} x \varphi(x, \bar{b})$.

Lemme 3.4.1. *Soient $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})$-formule telle que $\mathcal{M} \models \exists_{cof} x \varphi(x)$ et $\theta(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})$-formule arbitraire. Alors il existe une $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})$-formule $\psi(x)$ telle que :*
- $\mathcal{M} \models \exists_{cof} x \psi(x)$;
- $\mathcal{M} \models \forall x(\psi(x) \to \varphi(x))$;
- *pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$,*
  - *soit $\mathcal{M} \models \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \to \theta(x, \bar{a}))$;*
  - *soit $\mathcal{M} \models \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \to \neg\theta(x, \bar{a}))$.* □

La démonstration du lemme 3.4.1 n'est pas nécessaire pour comprendre le reste de l'esquisse et elle exige des arguments utilisant le *codage de Gödel* qui est hors du contexte de ce mémoire. Pour cette raison on la saute.

On va utiliser le lemme 3.4.1 pour construire $c \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{M}$. On énumère les $\mathcal{L}_c$-formules (où $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_A \cup \{c\}$) par :

$$\theta_0(c, \bar{y_0}), \theta_1(c, \bar{y_1}), \ldots, \theta_i(c, \bar{y_i}), \ldots$$

pour $i \in \mathbb{N}$.

On construit une suite de $\mathcal{L}_A$-formules :

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$$

telle que $\mathcal{M} \models \exists_{cof} x \varphi_i(x)$ pour tout $i \in\ N$. L'énumération des $\varphi_i(x)$ se fait de la façon suivante. Soit $\varphi_0(x)$ la formule $x = x$. Soit φ_i donnée. Comme $\mathcal{M} \models \exists_{cof} x \varphi_i(x)$, on construit φ_{i+1} conformément au lemme 3.4.1 telle que :
- $\mathcal{M} \models \exists_{cof} x \varphi_{i+1}(x)$;
- $\mathcal{M} \models \forall x(\varphi_{i+1}(x) \to \varphi_i(x))$;
- pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$,
  - soit $\mathcal{M} \models \exists y \forall x(x > y \wedge \varphi_{i+1}(x) \to \theta_i(x, \bar{a}))$;
  - soit $\mathcal{M} \models \exists y \forall x(x > y \wedge \varphi_{i+1}(x) \to \neg\theta_i(x, \bar{a}))$.

On construit c pour satisfaire $\varphi_i(x)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Considérons la $\mathcal{L}_A(M) \cup \{c\}$-théorie

$$\begin{aligned} \mathsf{T} = &\{\theta(\bar{a}) : \mathcal{M} \models \theta(\bar{a}) \text{ où } \theta(\bar{a}) \text{ est un } \mathcal{L}_A(\mathcal{M})\text{-énoncé}\} \\ &\cup \{c > a\}_{a \in \mathcal{M}} \cup \{\varphi_i(c)\}_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Toute partie finie de T est satisfait par $\mathcal{M}$ où c est interprété par un élément suffisamment large pour satisfaire $\varphi_n(x)$. D'après le théorème de compacité T est satisfaisable.

Soient $\mathcal{N} \models \mathsf{T}$ un modèle arbitraire où u interprète c et $\mathcal{K} = \mathsf{dcl}(\mathcal{N}; \mathcal{M} \cup \{u\}) \preceq \mathcal{N}$. Clairement $\mathcal{M} \cup \{u\} \subseteq \mathcal{K}$. Par construction de T, pour toute $\mathcal{L}_A$-formule $\theta(\bar{x})$ et pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$ ssi $\mathcal{N} \models \theta(\bar{a})$ ssi $\mathcal{K} \models \theta(\bar{a})$. Donc $\mathcal{M} \preceq \mathcal{K}$.

Définition 3.4.4. $\mathcal{K}$ est une *extension conservative* de $\mathcal{M}$ si pour tout $\bar{b} \in \mathcal{K}$ et toute $\mathcal{L}_A$-formule $\theta(u, \bar{v})$ il existe $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{L}_A$-formule $\psi(u, \bar{w})$ tels que :

$$\{u \in \mathcal{K} : \mathcal{K} \models \theta(u, \bar{b})\} \cap \mathcal{M} = \{u \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \psi(u, \bar{a})\}.$$

Autrement dit, tout sous-ensemble de $\mathcal{M}$ définissable dans $\mathcal{K}$ est déjà définissable dans $\mathcal{M}$.

En outre $\mathcal{K}$ est une *extension conservative* de $\mathcal{M}$. Soient $a \in \mathcal{M}$ et $b \in \mathcal{K}$ avec $b < a$. Alors l'ensemble $E = \{u \in \mathcal{K} : \mathcal{K} \models u \leq b\} \cap \mathcal{M}$ est définissable dans $\mathcal{M}$ tel que $E = \{u \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \psi(u, \bar{a})\}$ pour une ψ et un $\bar{a} \in \mathcal{M}$. Or E est borné donc il possède un élément maximal m. En effet m doit être égal à b. Donc $b \in E \subseteq \mathcal{M}$. Donc toute extension conservative $\mathcal{K} \succeq \mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ est une extension finale.

Extensions cofinales

Définition 3.4.5. Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ des modèles de PA_1. $\mathcal{N}$ est une *extension cofinale* de $\mathcal{M}$, noté par $\mathcal{M} \subseteq_{cf} \mathcal{N}$ si pour tout $a \in \mathcal{N}$ il existe $b \in \mathcal{M}$ tels que $\mathcal{N} \models b \geq a$.

Montrer tout modèle non standard de PA_1 a une extension cofinale est un résultat directe de compacité.

Proposition 3.4.1. *Soit $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ non standard. Alors $\mathcal{M}$ a une extension cofinale.*

Démonstration. Soient $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}_1$ un modèle non standard et $b \in \mathcal{M}$ un élément non standard. Considérons la $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup \{c\}$-théorie

$$\mathsf{T} = \{\varphi(\bar{a}) : \bar{a} \in \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}),\ \text{où } \varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{L}_A}\} \cup \{c \neq a\}_{a \in \mathcal{M}} \cup \{c < b\}.$$

Observons que T est finiment satisfaisable par $\mathcal{M}$ avec une réalisation de constante c par un élément approprié de $\mathcal{M}$. Donc par compacité il existe un modèle $\mathcal{K} \models \mathsf{T}$. Considérons la sous-structure initiale

$$\mathcal{N} = \{d \in \mathcal{K} : \mathcal{K} \models d < a \text{ pour un } a \in \mathcal{M}\}$$

de $\mathcal{K}$. On a clairement $\mathcal{M} \subseteq_{cf} \mathcal{N}$ □

Le résultat fondamental concernant les conditions de transfert de la vérité dans les extension cofinales est le théorème de décomposition de Gaifman.

Théorème 3.4.4 (Gaifman)**.** *[Kay91, p. 89] Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ sont des modèles de* PA_1*, alors il existe un unique modèle $\mathcal{K} \models \mathrm{PA}_1$ tel que $\mathcal{M} \subseteq_{cf} \mathcal{K} \subseteq_f \mathcal{N}$. De plus $\mathcal{M} \preceq \mathcal{K}$.* □

Conclusion

Dans ce mémoire, en outre des bases de modèles de l'arithmétique de Peano, on a étudié les conditions de transfert de la vérité dans les extensions. On peut considérer

— Le théorème de Robert MacDowell et Ernst Specker [MS61] est une amélioration du résultat de Skolem qui montre que tout modèle de PA_1 a une extension finale élémentaire.

— Le théorème de Haim Gaifman [Gai72],[Gai76].

comme les résultats essentiels de cette étude.

Un débouché intéressant de cette étude peut être appliquer les idées dans le MacDowell-Ernst Specker et Gaifman aux modèles de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel afin d'éclairer le rôle d'axiome d'infinité. [Ena99]

Annexe A

Bases de la logique du premier ordre

En mathématiques, on s'intéresse aux *objets mathématiques*, à leurs *propriétés*, et à la vérification de ces propriétés. La logique propositionnelle décrit les relations de vérité entre les propositions mais pas les objets. Pour cette raison, on va adopter un symbolisme qui pourra exprimer les propriétés des objets. [HA38, p. 50] On l'appelle la *logique du premier ordre*.

On va systématiquement définir un alphabet approprié par type de structure (symboles d'un langage), des mots (termes) décrivant les éléments et des phrases (formules) décrivant les propriétés. Les structures sont décrites par certains énoncés de base, qui s'appellent les *axiomes*. Les *théorèmes* se déduisent selon certaines règles de raisonnement à partir des axiomes.

Le premier ordre signifie qu'on s'est permis de quantifier sur les éléments mais pas les sous-ensembles. Le mémoire considère également des formules de la logique *du deuxième ordre*. Dans ce cas, on le précisera.

A.1 Syntaxe de la logique du premier ordre I

La grammaire de la logique du premier ordre est intuitive et simple.

Définition A.1.1. Un *langage du premier ordre* $\mathcal{L}$ contient :

- les **symboles logiques :**
  - opérateurs booléens : $\wedge, \vee, \neg$;
  - égalité : $=$;
  - quantificateurs : $\exists$ et $\forall$;
  - variables : $v_0, v_1, \ldots$ (dénombrable) ;
  - parenthèses :) et (;
- des **symboles non logiques :**
  - symboles de constantes c_i ;
  - symboles de fonctions de différentes arités f_j ;

— symboles de relations de différentes arités R_k.
La relation « = » sera toujours dans le langage même si elle est implicite. On indique simplement $\mathcal{L} = \{c_i, f_j, R_k\}_{(i,j,k)}$.

Les $\mathcal{L}$-*expressions* sont les chaînes finies de caractères.

On va utiliser différents types de parenthèses comme $], [$ ou $\}, \{$ de même que les abréviations :
— $\varphi \to \psi$ pour $\neg\varphi \vee \psi$;
— $\varphi \leftrightarrow \psi$ pour $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
dans les expressions du premier ordre pour une lecture plus aisée. De plus on peut omettre des parenthèses selon la convention que « $\neg$ » soit plus contraignant que « $\vee, \wedge$ » et que « $\vee, \wedge$ » soient plus contraignants que « $\to, \leftrightarrow$ » pour la même raison.

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Toute $\mathcal{L}$-expression n'est pas forcément significative. On construit donc par récurrence les *termes* de $\mathcal{L}$, qui décrivent les éléments des objets mathématiques et les *formules* de $\mathcal{L}$, qui décrivent des propriétés sur ces objets.

Définition A.1.2. L'ensemble Term des termes de $\mathcal{L}$ est défini par :
— si c est un symbole de constante de $\mathcal{L}$, alors $c \in \mathsf{Term}$;
— si x est un symbole de variable de $\mathcal{L}$, alors $x \in \mathsf{Term}$;
— si f est un symbole de fonction n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont dans Term, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{Term}$.

Définition A.1.3. L'ensemble Form des formules de $\mathcal{L}$ est défini par :
— si R est un symbole de relation n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont dans Term, alors $R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{Form}$ (appelée « formule atomique ») ;
— si $\varphi \in \mathsf{Form}$, alors $\neg\varphi \in \mathsf{Form}$;
— si $\varphi, \psi \in \mathsf{Form}$, alors $\varphi \wedge \psi \in \mathsf{Form}$ et $\varphi \vee \psi \in \mathsf{Form}$;
— si x est un symbole de variable et $\varphi \in \mathsf{Form}$, alors $\exists x\, \varphi \in \mathsf{Form}$ et $\forall x\, \varphi \in \mathsf{Form}$.

La notion de *complexité* vient naturellement de la construction de la syntaxe par récurrence et peut être définie par : la complexité des formules atomiques (resp. symboles de constantes, variables) est égale à 0 et si la complexité de la formule φ (resp. du terme $\bar{t}$) est n et la complexité de ψ est inférieure ou égale à n, alors la complexité de $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \exists x\varphi, \forall x\varphi$ (resp. $f(\bar{t})$) est $n + 1$.

On définit le *cardinal* $\|\mathcal{L}\|$ de $\mathcal{L}$ comme la somme des cardinaux des symboles logiques et symboles non logiques. Donc comme le cardinal de l'ensemble des symboles logiques est $\aleph_0$, on a

$$\|\mathcal{L}\| = \aleph_0 + |\mathcal{L}|.$$

Proposition A.1.1. *Le cardinal de* Form *est égal au cardinal de* $\mathcal{L}$*.*

Démonstration. Soit $\kappa = \|\mathcal{L}\|$. Toute formule est une chaîne finie de $\mathcal{L}$. Comme il existe κ chaînes finies de $\mathcal{L}$, on a $|\mathsf{Form}| \leq \kappa$. Observons que si le cardinal des symboles de relation est égal à κ alors il existe déjà κ formules atomiques, donc $|\mathsf{Form}| \geq \kappa$; sinon, alors $|\mathsf{Term}| = \kappa$, donc comme il y a κ formules de la forme $t_0 = t_1$ où $t_0, t_1 \in \mathsf{Term}$, on a $|\mathsf{Form}| \geq \kappa$. □

Définition A.1.4. Dans une $\mathcal{L}$-formule, une variable peut avoir des occurrences *liées* ou *libres*. On définit cela par récurrence :

— toute variable apparaissant dans une formule atomique est libre ;
— si φ est $\neg\psi$ alors les occurrences libres (et liées) d'une variable dans φ sont celles de ψ ;
— si φ est $\psi \wedge \theta$ alors les occurrences libres (et liées) d'une variable dans φ sont celles de l'union des occurrences dans ψ et θ ;
— si φ est $\psi \vee \theta$ alors les occurrences libres (et liées) d'une variable dans φ sont celles de l'union des occurrences dans ψ et θ ;
— si φ est $\exists x\psi$ alors chaque occurrence de x dans φ est liée et les occurrences des autres variables sont comme dans ψ ;
— si φ est $\forall x\psi$ alors chaque occurrence de x dans φ est liée et les occurrences des autres variables sont comme dans ψ.

Un *énoncé* est une formule dans laquelle aucune variable n'apparaît de façon libre.

A.2 Sémantique de la logique du premier ordre

Intuitivement, on définit les « univers possibles » dans lesquels $\mathcal{L}$ se *réalise*, et la « vérité » (relative) par rapport à ces univers.

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{M}$ est donnée par un ensemble M et une *interprétation* de chaque symbole non logique de $\mathcal{L}$.

Définition A.2.1. Une interprétation se définit de la façon suivante :

— si c est un symbole de constante, alors $c^{\mathcal{M}}$ est un élément de M ;
— si f est un symbole de fonction n-aire, alors $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ est une fonction ;
— si R est un symbole de relation n-aire, alors $R^{\mathcal{M}}$ est un sous-ensemble de M^n.

Définition A.2.2. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{L}$-structures. $\mathcal{M}$ est une *sous-structure* de $\mathcal{N}$, ce que l'on note $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ si M est un sous-ensemble de N et :

— si c est un symbole de constante, alors $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$;
— si f est un symbole de fonction n-aire, alors $f^{\mathcal{M}}$ est la restriction de $f^{\mathcal{N}}$ à M^n ;
— si R est un symbole de relation n-aire, alors $R^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{N}} \cap M^n$.

Définition A.2.3. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{L}$-structures. L'application $h : M \to N$ est un *morphisme* de $\mathcal{L}$-structures si elle vérifie :

— si c est un symbole de constante, alors $h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$;
— si f est un symbole de fonction n-aire et $\bar{a} \in M^n$ un n-uplet, alors $h(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\overline{h(a)})$;
— si R est un symbole de relation n-aire, alors $h(R^{\mathcal{M}}) \subset R^{\mathcal{N}}$.

Définition A.2.4. On dit que h est un *plongement* si c'est une injection qui satisfait, pour toute relation R de $\mathcal{L}$ et $\bar{a} \in M$,

$$\bar{a} \in R^{\mathcal{M}} \text{ ssi } h(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}};$$

et un *isomorphisme* si c'est un plongement bijectif.

Observons que si h est un plongement alors $\operatorname{Im} h$ est toujours une sous-structure de $\mathcal{N}$. Dans ce cas on dit que $\mathcal{N}$ contient une *copie isomorphe* de $\mathcal{M}$ ou par abus de langage que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$.

Définition A.2.5. Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\bar{x}$ un uplet des variables et $\bar{a} \in M$ de même longueur. On définit l'interprétation $t^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]}$ d'un terme t dans $\mathcal{M}$ à *paramètres* $[\bar{x} = \bar{a}]$ de la façon suivante :
— si c est un symbole de constante, alors $c^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]} = c^{\mathcal{M}}$;
— si x_i est une variable de $\bar{x}$, alors $x_i^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]} = a_i$;
— si f est un symbole de fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]})$.

Définition A.2.6. Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, φ une $\mathcal{L}$-formule, x un uplet des variables et $\bar{a} \in M$ de même longueur. On définit la *satisfaction* $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ (lisons $\mathcal{M}$ est un *modèle* de φ à paramètres $[\bar{x} = \bar{a}]$) de φ à paramètres $[\bar{x} = \bar{a}]$ par récurrence :
— si φ est la formule atomique $R(\bar{t})$, alors $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ ssi $(t^{\mathcal{M}[\bar{x}=\bar{a}]}) \in R^{\mathcal{M}}$;
— si φ est $\neg\psi$, alors $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \not\models \psi$;
— si φ est $\psi \wedge \theta$, alors $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \psi$ et $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \theta$;
— si φ est $\psi \vee \theta$, alors $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \psi$ ou $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \theta$;
— si φ est $\exists y \psi$, alors $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ ss'il existe un $m \in M$ tel que $\mathcal{M}[\bar{x}, y = \bar{a}, m] \models \psi$;
— si φ est $\forall y \psi$, alors $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}[\bar{x}, y = \bar{a}, m] \models \psi$ pour tout $m \in M$.

Observons que la satisfaction d'un *énoncé* ne dépend pas des paramètres. En effet les paramètres ne jouent un rôle dans la satisfaction d'une formule que s'ils interprètent des variables libres. On va donc désigner une formule φ dont les variables libres sont parmi $\bar{x}$ par $\varphi(\bar{x})$, et noter plus légèrement $\mathcal{M}[\bar{x} = \bar{a}] \models \varphi$ par $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$.

Définition A.2.7. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{L}$-structures. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont dites *élémentairement équivalentes*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ssi elles satisfont les mêmes énoncés.

Définition A.2.8. Un ensemble T de $\mathcal{L}$-énoncés s'appelle une $\mathcal{L}$-*théorie*. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. $\mathcal{M}$ est un *modèle* de T, indiqué par $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$, si elle satisfait tout énoncé de T. Une théorie ayant un modèle est dite *satisfaisable*. De plus, on définit la *théorie complète* de $\mathcal{M}$ par

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

Proposition A.2.1. *Soit $\mathcal{L}$ un langage du cardinal $\|\mathcal{L}\| = \kappa$. Il existe au maximum 2^κ $\mathcal{L}$-structures de cardinal κ à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit E un ensemble de cardinal κ. Il existe κ façons d'interpréter une constante, 2^κ façon d'interpréter une relation une-aire et il existe $2^{\kappa^2} = 2^\kappa$ façons d'interpréter une relation binaire etc. Donc il y a au maximum 2^κ $\mathcal{L}$-structures sur E. □

On conclut d'après la proposition A.2.1, comme $\|\mathcal{L}_A\| = \aleph_0$, il existe au maximum $2^{\aleph_0}$ $\mathcal{L}_A$-structures dénombrables à isomorphisme près.

A.3 Syntaxe de la logique du premier ordre II

Définition A.3.1. Soient T une $\mathcal{L}$-théorie et φ une $\mathcal{L}$-formule. Une *preuve formelle* de φ dans T est une suite finie des formule $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ telle que : pour tout $i \leq n$,

- φ_i est dans T ou ;
- φ_i est un *axiome de logique* ou ;
  - les tautologies ;
  - les axiomes de l'égalité ;
  - l'axiome du quantificateur existentiel.
- φ_i est obtenue par *Modus Ponens* à partir des φ_j, φ_k pour $j, k < i$ ou ;
- φ_i est obtenue par $\exists$-*introduction* à partir d'une φ_j pour $j < i$.

S'il existe une preuve formelle de φ dans T on l'indique par $\mathsf{T} \vdash \varphi$.

Définition A.3.2. Une $\mathcal{L}$-théorie T est dite *cohérente* ss'il n'existe aucun $\mathcal{L}$-énoncé φ tel que $\mathsf{T} \vdash \varphi$ et $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$.

Définition A.3.3. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie. La théorie $\mathsf{T}' \supseteq \mathsf{T}$ est une *complétion* de T si elle est une $\mathcal{L}$-théorie maximale cohérente.

Théorème A.3.1 (Théorème de Lindenbaum)**.** *[CK73, p. 26] Pour un langage $\mathcal{L}$, toute $\mathcal{L}$-théorie cohérente T a une complétion.* □

Bibliographie

[Cha15] Zoe Chatzidakis. Cours de logique. Notes de cours donné à l'ENS. `https://www.math.ens.fr/~zchatzid/papiers/coursENS.pdf`, 2015.

[CK73] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73. Elsevier, Amsterdam, 1973.

[Ded93] Richard Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen ? 2. Aufl. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. XIX + 58 S. 8° (1893)., 1893.

[Ena99] Ali Enayat. Analogues of the MacDowell-Specker theorem for set theory. In *Models, algebras, and proofs. Selected papers of the X Latin American symposium on mathematical logic, Bogotá, Colombia, June 24–29, 1995*, pages 25–50. New York, NY : Marcel Dekker, 1999.

[Gai72] Haim Gaifman. A not e on models and submodels of arithmetic. Conf. Math. Logic, London 1970, Lect. Notes Math. 255, 128-144 (1972)., 1972.

[Gai76] Haim Gaifman. Models and types of Peano's arithmetic. *Ann. Math. Logic*, 9 :223–306, 1976.

[HA38] D. Hilbert and W. Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logik*, volume 27. Springer, Berlin, 1938.

[Hil02] D. Hilbert. Sur les problèmes futurs des Mathématiques (traduction par L. Laugel). Congrès. intern. des math. (Paris 1900) 58-114 (1902)., 1902.

[Kay91] Richard Kaye. *Models of Peano arithmetic*, volume 15. Oxford : Clarendon Press, 1991.

[MS61] R. Mac Dowell and E. Specker. Modelle der Arithmetik. Infinitistic Methods, Proc. Symp. Foundations Math., Warsaw 1959, 257-263 (1961)., 1961.

[Pea89] Giuseppe Peano. *Arithmetices principia nova methodo exposita.* 1889.

[Sko33] Th. Skolem. Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk Mat. Forenings Skr., II. Ser. No. 1/12, 73-82 (1933)., 1933.

[Sko34] T. Skolem. Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen. *Fundam. Math.*, 23 :150–161, 1934.

[van04] Dirk van Dalen. *Logic and structure. 4th ed.* Berlin : Springer, 4th ed. edition, 2004.